# TD n°1 d'Analyse II

## Calculs Intégrales

### Exercice 1

Calculons l'intégrale de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ comme limite de sommes de Riemann-Darboux dans les cas suivants :

1) $f(x) = \sin x$ et $f(x) = \cos x$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ et $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, $k = 0, \ldots, n$

Calculons d'abord $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it} \, dt$

Par le théorème de Riemann-Darboux c'est la limite de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot f(x_k)$$

Pour $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ on obtient $(x_{k+1} - x_k) f(x_k) = \frac{k\pi + \pi - k\pi}{2n} e^{i\frac{k\pi}{2n}}$

$$S_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)^k$$

Ce qui donne une somme géométrique de somme $S_n = (1-i) \dfrac{\frac{\pi}{2n}}{1 - e^{i\frac{\pi}{2n}}}$

En posant $u = \frac{\pi}{2n}$ et $\lim_{u \to 0} \frac{e^{iu} - 1}{u} \to i$

Alors la limite de $S_n$ est $1 + i$ lorsque $u \to 0$

Mais $e^{it} = \cos t + i \sin t$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = 1 + i$$

Par identification, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = 1$$

2) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x_k = a q^k$, $k = 0, 1, \dots, n$

($q$ étant à déterminer)

- On veut $x_k = a q^k$ ce qui donne $x_0 = a$. Mais il faut aussi $x_n = b$. Donc $a q^n = b \Rightarrow q^n = \dfrac{b}{a}$

Soit $q = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$

Cherchons la limite de $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot g(x_k)$

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a q q^k - a q^k}{a q^k}$$

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n-1} q - 1 = (q-1) \sum_{k=0}^{n-1} 1$$

$$S'_n = n(q-1)$$

$$S'_n = n\left[\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right) - 1\right]$$

$$S'_n = n\left(e^{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}} - 1\right)$$

posons $u = \dfrac{1}{n}$ on obtient

$$S'_n = n\left(e^{u\ln\frac{b}{a}} - 1\right) = \frac{1}{u}\left(e^{u\ln\frac{b}{a}} - 1\right)$$

Alors la limite de $S'_n = \ln\dfrac{b}{a} = \ln b - \ln a$

Donc $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln b - \ln a$

3) $h(x) = \alpha^x$ sur $[a, b]$ ; $\alpha > 0$ et $x_k = a + (b-a)\dfrac{k}{n}$, $k = 0, \dots, n$

2)

$$h(x) = \alpha^x \text{ sur } [a, b],\ \alpha > 0 \quad \text{et } x_k = a + (b-a)\frac{k}{n},\ k = 0, 1, \dots, n$$

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b \alpha^x\,dx$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(x_k)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha^a (b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{\frac{(b-a)k}{n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha^a (b-a)}{n} \left(1 + \alpha^{\frac{b-a}{n}} + \dots + \alpha^{\frac{(n-1)(b-a)}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha^a (b-a)}{n} \cdot \frac{1 - \alpha^{b-a}}{1 - \alpha^{\frac{b-a}{n}}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{\alpha^a - \alpha^b}{1 - \alpha^{\frac{b-a}{n}}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} (\alpha^a - \alpha^b) \frac{\frac{b-a}{n}}{1 - \alpha^{\frac{b-a}{n}}}$$

posons $X = \dfrac{b-a}{n}$

$n \to +\infty$ ; $X \to 0$

Il vient que $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx = \lim_{X \to 0} (\alpha^a - \alpha^b) \frac{X}{1 - \alpha^X}$

$$= \lim_{X \to 0} (\alpha^a - \alpha^b) \frac{X}{1 - e^{X \ln \alpha}}$$

$$= \lim_{X \to 0} (\alpha^a - \alpha^b) \frac{1}{-\frac{e^{X \ln \alpha} - 1}{X}}$$

$$= \lim_{X \to 0} (\alpha^a - \alpha^b) \frac{1}{-\ln \alpha \left(\frac{e^{X \ln \alpha} - 1}{X \ln \alpha}\right)}$$

$$= (\alpha^a - \alpha^b) \frac{1}{-\ln\alpha}$$

$$\int_a^b h(x)\,dx = \frac{\alpha^a - \alpha^b}{\ln \alpha}$$

# Exercice 2

1) Repondons par vrai ou faux en justifiant votre réponse

a) Toute fonction intégrable sur $[a, b]$ est continue Faux car les fonction en escaliers sur $[a, b]$ sont integrables sur $[a, b]$ mais non continues sur $[a, b]$

b) Si $f$ est une fonction continue sur $[a, b]$, sauf en un point, alors $f$ admet une primitive qui s'annule en $b$. Faux

Si $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = 0$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, 1]$ et $f(\frac{1}{2}) = 1$

Supposons qu'il existe une primitive de $f$ sur $[0, 1]$ qui vérifie $F(1) = 0$

Sur $[0, \frac{1}{2}]$, les primitives de la fonction $f$ sont les constantes $F(x) = K_1$ pareille sur $]\frac{1}{2}, 1]$ ; $F(x) = K_2$

Pour que $F(1) = 0$ on doit prendre $K_2 = 0$

Le problème est à $\frac{1}{2}$ On veut $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{F(x) - F(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = f(\frac{1}{2}) = 1$

Si $x \to \frac{1}{2}$ avec $x > \frac{1}{2}$ $\dfrac{F(x) - F(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \dfrac{-F(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}}$

$x \to \frac{1}{2}$ $x - \frac{1}{2} \to 0^+$

car le numérateur est constant donc la limite ne peut pas être égale à 1. (on aurait pu faire le même raisonnement sur $[0, \frac{1}{2}[$

c) Toute primitive d'une fonction continue sur $[a, b]$ est dérivable sur $]a, b[$ Vrai

Par definition, une primitive de $f$ sur $[a, b]$ est une fonction $F$ qui vérifie $\forall x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$

d) Toute primitive d'une fonction positive ou nulle est
ou nulle Vrai

- Si $f$ est une fonction positive ou nulle ,

2) Calculons la limite de la suite $U_n$ suivante :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2 k}}$$

## Exercice 3

Calculons les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité

$$\int \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\,dx$$

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 + x^2 \\ &= (x^2+1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{ax + b}{x^2 + x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 - x + 1}$$

Determination des constantes

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{(ax+b)(x^2 - x + 1) + (cx + d)(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

$$= \frac{(c+a)x^3 + (-a + b + c + d)x^2 + (-b + a + c + d)x + (b + d)}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

$$\begin{cases} c + a = 0 \\ b - a + c + d = 0 \Rightarrow a + c = -1 \\ a - b + c + d = 0 \Rightarrow b = d \\ b + d = 1 \Rightarrow b = d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2c = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \qquad a = \frac{1}{2}$$

d'où $$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2 + x + 1} + \frac{-x + 1}{x^2 - x + 1}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{-x + 1}{x^2 - x + 2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2 + x + 1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x - 1}{x^2 - x + 1}\,dx$$

$$\cancel{\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\,dx}$$

$$* \quad \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1}\,dx \qquad \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx \qquad \text{En posant } t = x+\frac{1}{2},\ dt = dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)$$

$$* \quad \int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1-1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{4}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$$

Scanned by CamScanner

Déterminons le domaine de validité

$I \; \exists$ ssi $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} > 0$ , $\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$ et $x^2-x+1 \neq 0$

$$\boxed{D_V = \mathbb{R}}$$

$$\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\, dx$$

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

$$a = \left[\frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)}\right]_{x=0} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = \left[\frac{1}{x(x+2)}\right]_{x=-1} \Rightarrow b = -1$$

$$c = \left[\frac{1}{x(x+1)}\right]_{x=-2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Par suite $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\, dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right) dx$

$$\boxed{\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\, dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C}$$

$$\boxed{D_V = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;-1\,;0\}}$$

$$\int \frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\,dx$$

$$\frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x(x+1-x)}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\int \frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\,dx = \int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx - \int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$$

En posant $t = \sqrt{x+1}$

$\Rightarrow t^2 = x+1$

$\Rightarrow x = t^2 - 1$

$\Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = 2\int \frac{t^2}{(t^2-1)}\,dt$$

$$= 2\int dt - 2\int \frac{1}{t^2-1}\,dt.$$

$$= 2t - 2\,\mathrm{argth}\,t + c$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx$$

En posant $t = \sqrt{x}$

$\Rightarrow t^2 = x$

$\Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\int \frac{t^2}{t^2}\,dt$$

$$= 2t + c$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\,dx = 2\sqrt{x+1} - 2\,\mathrm{argth}(\sqrt{x+1}) - 2\sqrt{x} + c}$$

$D_v = [0; +\infty[$

Scanned by CamScanner

$$\int \frac{x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2 - 1}\, dx$$

$$\int \frac{x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2 - 1}\, dx = \int \left( \frac{x}{x^2 - 1} + \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2 - 1} \right) dx$$

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1}\, dx$$

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + c$$

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2 - 1}\, dx$$

posons $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow u^2 (x+1) = x - 1$$

$$\Rightarrow x (u^2 - 1) = -u^2 - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{u^2 + 1}{1 - u^2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = \frac{(u^2 + 1)^2}{(1 - u^2)^2} - 1 = \frac{4u^2}{(1 - u^2)^2}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2u(1 - u^2) - (u^2 + 1)(-2u)}{(1 - u^2)^2}\, du = \frac{4u}{(1-u)^2}\, du$$

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2 - 1}\, dx = \cancel{\int \frac{4u^2}{4u^2 (1 - u^2)}}\, du = \int \frac{u}{\frac{4u^2}{(1 - u^2)^2}} \times \frac{4u}{(1 - u^2)^2}\, du = \int du$$

$$\int du = u + C$$

$$\int \frac{x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$$

$$J = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\, dx$$

$$I + J = \int dx = x + c$$

$$I - J = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$= - \ln \left| \sin x + \cos x \right| + c'$$

$$2I = x - \ln \left| \sin x + \cos x \right| + c'$$

$$I = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln \left| \sin x + \cos x \right| + K$$

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln \left| \sin x + \cos x \right| + K$$

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

En posant $x = \cos t$
$dx = -\sin t \, dt$

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}}\, dx = - \int \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\, dt$$

$$= - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \sin x + \cos x \right| + k$$

$$\int \frac{\arctan x}{x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2} \arctan^2 x + K$$

$$\int \frac{x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2 - 1}\, dx = \int \frac{x}{x^2-1}\, dx + \int \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2-1}\, d$$

Rés $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C$

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2-1}\, dx$$

Posons $u = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

$$u^2 = \frac{x-1}{x+1}$$

$$u^2(x+1) = x - 1$$

$$u^2 x + u^2 = x - 1$$

$$x(u^2 - 1) = -u^2 - 1$$

$$x = \frac{u^2+1}{1-u^2} \Longrightarrow x^2 - 1 = \frac{u^2+1}{1-u^2} = \frac{u^4 + 2u^2 + 1}{1 - 2u^2 + u^4} - 1$$

$$= \frac{u^4 + 2u^2 + 1 - 1 + 2u^2 - u^4}{1 - 2u^2 + u^4} = \frac{4u^2}{1-2u^2+u^4}$$

$$dx = \frac{2u(1-u^2) - (u^2+1)(-2u)}{(1-u^2)^2}$$

$$= \frac{2u - 2u^3 + 2u^3 + 2u}{(1-u^2)^2}\, du = \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}$$

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2-1}\, dx = \int \frac{u}{\frac{4u^2}{(1-u^2)^2}} \times \frac{4u}{(1-u^2)^2}\, du$$

$$= \int du = u + C = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

$$\int \frac{x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

$$\boxed{\int \frac{x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2-1}\, dx = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C}$$

Scanned by CamScanner

# Exercice 4

Soit l'intégrale $J = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\,(2-x^2)} dx$

1) Calculons la valeur de J

La fonction $x \longmapsto \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\,(2-x^2)}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ donc

$J = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\,(2-x^2)} dx$ est bien definie.

$x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t\, dt$

$x = \cos t \Rightarrow t = \arccos x$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

$x = 1 \Rightarrow t = 0$

donc $J = \int_{\pi/3}^{0} \frac{\cos^2 t \times (-\sin t)}{\sin t\,(2-\cos^2 t)} dt$

$= \int_{\pi/3}^{0} \frac{-\cos^2 t}{2-\cos^2 t} dt$

$= \int_{0}^{\pi/3} \frac{\cos^2 t}{2-\cos^2 t}$

$u = \tan t \Rightarrow t = \arctan u$

$dt = \frac{1}{1+u^2} du$

$t = 0 \Rightarrow u = 0$

$t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \sqrt{3}$

$J = \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{\cos^2(\arctan u)}{2-\cos^2(\arctan u)} \times \frac{1}{1+u^2} du$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2}$$

$$J = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{1+u^2}}{2 - \frac{1}{1+u^2}} \times \left(\frac{1}{1+u^2}\right) du$$

$$J = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+2u^2)(1+u^2)} du$$

$$J = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2u^2 - 2u^2 + 2 - 1}{(1+2u^2)(1+u^2)} du$$

$$J = \int_0^{\sqrt{3}} \left( \frac{2u^2+2}{(1+2u^2)(1+u^2)} - \frac{(2u^2+1)}{(1+2u^2)(1+u^2)} \right) du$$

$$J = \int_0^{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{1+2u^2} - \frac{1}{1+u^2} \right) du$$

$$J = \int_0^{\sqrt{3}} 2 \times \frac{1}{1+2u^2} du - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2} du$$

$$J = \left[ \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\, u) - \arctan u \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$J = \sqrt{2} \arctan \sqrt{6} - \arctan \sqrt{3}$$

2) Déduisons $I = \int_{1/2}^{1} \arctan(\sqrt{1-x^2})\, dx$

On remarque que $\left(\arctan(\sqrt{1-x^2})\right)' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)}$

Effectuons une intégration par partie de $J$

$$J = \int_{1/2}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)} dx = \int x \times \frac{x}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)} dx$$

Posons $v = x \Rightarrow v' = 1$

$$u' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\,(2-x^2)} \Rightarrow u = -\arctan\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$J = \left[-1 \arctan\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]_{1/2}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \arctan\left(\sqrt{1-x^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2} + I \Rightarrow I = J - \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I = \int_{1/2}^{1} \arctan\left(\sqrt{1-x^2}\right) dx = \sqrt{2}\arctan\sqrt{6} - \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$$

## Exercice 6

1) Déterminons l'ensemble des applications dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle

$$(x\ln x)y' - (3\ln x + 1)y = x^3(x - x\ln x - 1)$$

- Détermination de la solution homogène

Cette solution est de la forme $y_1(x) = \lambda\, e^{-A(x)} + y_0$

$$A(x) = \int \frac{3\ln x + 1}{x \ln x}\, dx = \int 3 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln x}\, dx$$

$$= 3\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$$

$$= 3\ln x + \ln|\ln x| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$= \ln|x^3 \ln x| + c$$

$$y = \lambda e^{-3\ln x} e^{-\ln|\ln x|} e^{c}$$

$$= \lambda e^{-3\ln x} \times (-\ln x)$$

$$\boxed{y = \lambda x^3 \ln x} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

et $y_0$ est une solution particulière. Déterminons $y_0$

$$y_0 = \lambda(x)\, x^3 \ln x \quad \text{avec} \quad \lambda(x) = \int \frac{C(x)}{A(x)\, e^{-A(x)}}$$

$$\lambda(x) = \int \frac{x^3(x - x\ln x - 1)}{x\ln x\,(x^3 \ln x)} = \int \frac{x - x\ln x - 1}{x(\ln x)^2}$$

$$= \int \frac{x}{x(\ln x)^2} - \frac{x\ln x}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx = \int \frac{1}{(\ln x)^2}\,dx - \int \frac{1}{\ln x}\,dx$$

$$- \int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$$

$\lambda(x) = \int \frac{1}{(\ln x)^2}\,dx - \int \frac{1}{\ln x}\,dx - \int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

$\int \frac{-1}{(\ln x)^2}\,dx = \int \frac{-x}{x(\ln x)^2}\,dx$

$u' = -\frac{1}{x(\ln x)^2} \Rightarrow u = -\frac{1}{\ln x}$

$v = x \Rightarrow v' = 1$

$\lambda(x) = \left[\frac{-x}{\ln x}\right] + \int \frac{1}{\ln x}\,dx - \int \frac{1}{\ln x}\,dx + \left[\frac{-1}{\ln x}\right]$

$= \left[\frac{-x}{\ln x}\right] + \left[\frac{1}{\ln x}\right]$

$\lambda(x) = \frac{1-x}{\ln x}$

La solution particulière est $y_0 = \frac{(1-x)}{\ln x}(x^3 \ln x)$

$y_0 = x^3(1-x)$

La solution générale est $y = y_1 + y_0$

$y = \lambda x^3 \ln x + x^3(1-x)$

$= x^3(\lambda \ln x + 1 - x)$

$$\boxed{y = x^3(\lambda \ln x - x + 1)}$$

2) a) Calculons la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie

par $v_n = \int_0^1 x^n \sin^2(x^2)\,dx$

Par encadrement on a : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$0 \leq \sin(x^2) \leq 1$

$0 \leq \sin^2(x^2) \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq x^n \sin^2(x^2) \leq x^n$$

$$\Rightarrow \int 0 \leq \int x^n \sin^2(x^2)dx \leq \int x^n dx$$

$$0 \leq v_n \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$0 \leq v_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1$$

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

b) En intégrant par parties, trouvons un équivalent de $v_n$ quand $n \to +\infty$

$$v_n = \int_0^1 x^n \sin^2(x^2) dx$$

Posons :

$u'(x) = x^n \Rightarrow u(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$v(x) = \sin^2(x^2) \Rightarrow v'(x) = 2 \times 2x \times \cos(x^2) \sin(x^2)$

$= 4x \cos(x^2) \sin(x^2)$

$$v_n = \left[\frac{\sin^2(x^2)\, x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1}(x^{n+1})(4x\cos(x^2)\sin(x^2)) dx$$

$$v_n = \frac{\sin^2(1)}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 x^{n+1} \sin(2x^2) dx$$

On peut montrer que $\frac{-2}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} \sin(2x^2) dx$ tend vers 0 d'après a). Par suite $v_n$ est équivalent à $\frac{\sin^2(1)}{n+1}$ quand $n \to +\infty$ ce qui est encore équivalent à $\frac{\sin^2(1)}{n}$

3) a) Ecrivons un developpement limité de $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ à l'ordre 6 au voisinage de 0

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$DL_0^6\left(\frac{1}{1+u}\right) = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k x^k + o_0(x^6)$$

$$= 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + u^6 + o_0(x^6)$$

posons $u = x^2$

$$DL_0^6\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o_0(x^6)$$

$$DL_0^6(\operatorname{arctg}(x)) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \cancel{- \frac{1}{7}x^7} + o_0(x^6)$$

$$\boxed{DL_0^6(\operatorname{arctg}(x)) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)}$$

b) Montrons qu'il existe deux nombres rationnels $\alpha_1$ et $\alpha_2$ tels que $\operatorname{arctg}(x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5) = x + o(x^5)$ $\cancel{= \tan(x + o(x^5))}$

$$\cancel{\tan(\operatorname{arctg}(x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5)) = \tan x}$$

$$\cancel{x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5 = \tan x}$$

$$\cancel{x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5 =}$$

$$DL(\arctan(x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5)) =$$

$$= x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5 - \frac{1}{3}(x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5)^3 + \frac{1}{5}(x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x)^5$$

$$= x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5 - \frac{1}{3}(x^3 + 3\alpha_1 x^5) + \frac{1}{5}(x^5)$$

$$= x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^5 - \frac{1}{3}x^3 - \alpha_1 x^5 + \frac{1}{5}x^5$$

$$= x + x^3\left(\alpha_1 - \frac{1}{3}\right) + x^5\left(\alpha_2 - \alpha_1 + \frac{1}{5}\right)$$

Par identification

$$\begin{cases} \alpha_1 - \frac{1}{3} = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_1 + \frac{1}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{3} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

c) Déduisons le développement limité de $x \longmapsto \tan(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0

$$\tan\left(\arctan\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right)\right) = \tan\left(x + o(x^5)\right)$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

d) Montrons que l'on a, $\int_x^1 \tan(t)\,dt = -\ln(\cos 1) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$, quand $x \longrightarrow 0$.

$$\int_x^1 \tan t\,dt = -\ln(\cos 1) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6) \text{ quand } x \to 0$$

$$\int_x^1 \tan t\,dt = \left[-\ln|\cos t|\right]_x^1$$

$$= -\ln|\cos 1| + \ln|\cos x|$$

par suite $\lim\limits_{x \to 0} \left[-\ln|\cos 1| + \ln|\cos x|\right] = -\ln|\cos 1|$

Une primitive de tangente est

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$$

$\int_x^1 \tan t\,dt = F(1) - F(x)$ ($F$ étant une primitive de $\tan t$)

D'autre part on sait que la primitive de $\tan t$ est $-\ln|\cos t|$

d'où $F(1) = -\ln(\cos 1)$

Par conséquent on a :

$$\int_x^1 \tan t\,dt = -\ln(\cos 1) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$$

4) Calculons la limite de la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ suivante

$$U_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$U_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \dots \times \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\ln \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\right)$$

$$2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{n}$$

$$= \frac{1}{n} . \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{avec } f(x) = \ln x$$

$$= \int_0^1 \ln x \, dx$$

$$= \left[ x \ln x - x \right]_0^1 = -1$$

d'où $\lim_{n \to +\infty} \ln(U_n) = -1 \Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{e}}$$

5) Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g 2 fonction continues sur $[a, b]$.

a) Démontrons l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante:

$$\left( \int_a^b f(t) g(t) \, dt \right)^2 \leq \int_a^b (f(t))^2 \, dt \times \int_a^b (g(t))^2 \, dt$$

$$\int_a^b f(t) + x g(t) \, dt \geq 0$$

$$\int_a^b g^2(t) \, dt + 2x \int_a^b f(t) g(t) \, dt + x^2 \int_a^b g^2(t) \, dt \geq 0$$

$$\int_a^b f^2(t) \, dt$$

Nous obtenons un polynôme du $2^{nde}$ degré positif donc son discriminant $\Delta \leq 0$

$$\Delta = 4 \left( \int_a^b f(t) g(t) \, dt \right)^2 - 4 \left( \int_a^b g^2(t) \, dt \right) \left( \int_a^b f^2(t) \, dt \right) \leq 0$$

$$\left( \int_a^b f(t) g(t) \, dt \right)^2 \leq \left( \left( \int_a^b g^2(t) \, dt \right) \times \left( \int_a^b f^2(t) \, dt \right) \right).$$

b) Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f \geq 0$, $g \geq 0$, $fg \geq 1$. Montrons : $\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \geq 1$

- Soit $f \geq 0$, $g \geq 0$ et $fg \geq 1$

La fonction $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ sont continues sur $[0; 1]$

D'après l'inégalité de Cauchy Swartz

$$\left(\int_0^1 \sqrt{f}\sqrt{g}\right)^2 \leq \int_0^1 (\sqrt{f})^2 \times \int_0^1 (\sqrt{g})^2$$

or $f \cdot g \geq 1 \Rightarrow \sqrt{fg} \geq \sqrt{1} = 1$

Par suite on a : $\int_0^1 (\sqrt{f})^2 \int_0^1 (\sqrt{g})^2 \geq \int_0^1 dt \geq [t]_0^1 = 1$

On a enfin $\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \geq 1$

## Exercice 8

1) Dans chacun des exemples suivants, montrons que la suite, dont le terme général est $U_n$ converge et calculons sa limite

a) $U_n = n^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n+k}$

$$= n^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$$

$$= n^{-\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{k}{n}}$$

$$= n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{k}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{k}{n}}.$$

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On a la suite de Riemann

Donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = \int_0^1 \sqrt{1+t}\, dt = \int_0^1 (1+t)^{\frac{1}{2}} dt = \left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$

3

$$= \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(1+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2^{5/2}}{3} - \frac{2}{3}$$

Donc la suite $U_n$ converge vers

b) $U_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

Soit $V_n = \ln U_n$

$$V_n = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Somme de Riemann

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt$$

Intégration par partie

Soit $U' = 1 \Rightarrow U = t$

$V = \ln(1+t^2) \Rightarrow V' = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$

$$= (\ln 2) - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$

$$\begin{array}{r|l} t^2 & 1+t^2 \\ \hline -t^2-1 & 1 \\ \hline 0\ \ -1 & \end{array}$$

$t^2 = 1(1+t^2) - 1$

$$\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

$$\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = [t]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= [t]_0^1 - [\arctan t]_0^1$$

On a $= \int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt = \ln 2 - 2(1 - \arctan 1 + \arctan 0)$

$= \ln 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$ ......... $\dfrac{\pi}{2} - 2$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = e^{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}} = e^{\ln 2} \times e^{\frac{\pi}{2} - 2} = 2e^{\frac{\pi}{2} - 2}$

Donc $U_n \longrightarrow 2e^{\frac{\pi}{2} - 2}$

Calculons les intégrales ou primitives suivantes :

2)

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$$

Posons $t = \pi - x \Rightarrow \begin{aligned} x &= \pi - t \\ dx &= -dt \end{aligned}$

Il vient que : $I = -\displaystyle\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)}\,dt$

$$= +\int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left( \frac{\pi \sin t}{1 + \cos^2 t} - \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} \right) dt$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt$$

Posons $u = \cos t \qquad du = -\sin t\,dt$

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt = -\pi \int_0^{\pi} \frac{du}{1 + u^2}$$

$$= -\pi \left[\arctan u\right]_0^{\pi} = -\pi \left[\arctan \cos t\right]_0^{\pi}$$

$$= -\pi \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2I = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{4}}$$

4 3) Pour p et q entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$

a) Montrons que $I(p,q) = \frac{p}{1+q} I(p-1, q+1)$ pour $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$

Intégration par partie de $I(p,q)$

soit $u' = (1-x)^q \Rightarrow u = \frac{-1}{q+1}(1-x)^{q+1}$

$v = x^p \Rightarrow v' = p x^{p-1}$

$$I(p,q) = \left[ \frac{-1}{q+1}(1-x)^{q+1} \times x^p \right]_0^1 + \frac{p}{q+1} \int_0^1 (1-x)^{q+1} x^{p-1} dx$$

donc $I(p,q) = \frac{p}{q+1} I(p-1; q+1)$

Déduisons $I(p,q) = \frac{p!\, q!}{(p+q+1)!}$

$$I(p-1; q+1) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q+1} dx$$

posons $u' = (1-x)^{p+1} \Rightarrow u = \frac{-1}{q+2}(1-x)^{q+2}$

$v = x^{p-1} \Rightarrow v' = (x)^{p-2} \times (p-1)$

$$I(p,q) = \frac{p}{q+1} \times \frac{p-1}{q+2} \times I(p-2, q+2)$$

on déduit que $I(p,q) = \frac{p}{q+1} \times \frac{p-1}{q+2} \times \cdots \times \frac{1}{p+q} \times I(0, p+q)$

Calculons $I(0, p+q)$

$$I(0, p+q) = \int_0^1 (1-x)^{p+q} dx = \left[ -\frac{1}{p+q+1}(1-x)^{p+q+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{p+q+1}$$

donc $I(p+q) = \frac{p}{q+1} \times \frac{p-1}{q+2} \times \cdots \times \frac{1}{p+q} \times \frac{1}{p+q+1}$

$$I(p,q) = \frac{p!\, q!}{(1+p+q)!}$$

b) Déduisons $I = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1}x \cos^{2q+1}x \, dx$

Posons $v = \sin x$ ; $dv = \cos x \, dx$

$x = 0$ , $v = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ , $v = 1$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x \times (1 - \sin^2 x)^n \cos x \, dx$$

$$= \int_0^1 v^{2n+1} (1 - v^2)^n \, dv$$

$$= \int_0^1 v^{2n} (1 - v^2)^n \, v \, dv$$

posons $t = v^2 \Rightarrow dt = 2v \, dv$

$v = 0 \quad t = 0$

$v = 1 \quad t = 1$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 v^{2n} (1 - v^2)^n (2v \, dv)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 t^n \times (1 - t)^n \, dt$$

D'après 3) a) on a

$$I = \frac{n! \, n!}{(n+1+1)!} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{I = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

ROUSSIM

4) Soit $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2+a^2}}\, dt$ ; $x, a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que l'on a $n\, I_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)a^2 I_{n-2}(x)$ pour $n \geq 2$.

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2+a^2}}\, dt = \int_0^x \frac{t^{n-1+1}}{\sqrt{t^2+a^2}}\, dt$$

$$= \int_0^x t^{n-1} \times \frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}\, dt$$

Posons $u' = \frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}} \Rightarrow u = \sqrt{t^2+a^2}$

$v = t^{n-1} \Rightarrow v' = (n-1)\, t^{n-2}$

$$I_n(x) = \left[t^{n-1}\sqrt{t^2+a^2}\right]_0^x - (n-1)\int_0^x t^{n-2}\sqrt{t^2+a^2}\,dt$$

$$= x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)\int_0^x \frac{t^{n-2}(t^2+a^2)}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt$$

$$= x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)\int_0^x \frac{t^n + t^{n-2}\times a^2}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt$$

$$= x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)\left(\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt + \int_0^x \frac{a^2 t^{n-2}}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt\right)$$

$$I_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)\,I_n(x) - a^2(n-1)\,I_{n-2}(x)$$

$$\boxed{n\,I_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - a^2(n-1)\,I_{n-2}(x)}$$

b) Déduisons la valeur de $I_5(2) = \int_0^2 \frac{t^5}{\sqrt{t^2+5}}\,dt$

$$n\,I_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - a^2(n-1)\,I_{n-2}(x)$$

$$5\,I_5(2) = 2^4\sqrt{4+5} - 5(5-1)\,I_3(2)$$

$$= 2^4\sqrt{9} - 20\,I_3(2)$$

$$5\,I_5(2) = 48 - 20\,I_3(2)$$

$$I_5(2) = \frac{48}{5} - 4\,I_3(2)$$

Calculons $I_3(2)$

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt$$

$$I_3(2) = \int_0^2 \frac{t^3}{\sqrt{t^2+5}}\,dt$$

$$= \int_0^2 t^2 \times \frac{t}{\sqrt{t^2+5}}\,dt$$

Posons $u' = \frac{t}{\sqrt{t^2+5}} \Rightarrow u = \sqrt{t^2+5}$

$v = t^2 \Rightarrow v' = 2t$

$$6\, I_3(2) = \left[t^2\sqrt{t^2+5}\right]_0^2 - \int_0^2 2t\sqrt{t^2+5}\,dt$$

$$= 12 - \int_0^2 2t\sqrt{t^2+5}\,dt$$

$$= 12 - \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{t^2+5}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$= 12 - \left(\frac{2}{3}(3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= 12 - \left(\frac{2}{3}(3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(5)^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$I_5(2) = \frac{48}{5} - 4\times 12 + \left[\left(\frac{2}{3}(3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(5)^{\frac{3}{4}}\right)\times(+4)\right]$$

$$= \frac{48 - 48(5)}{5} + \frac{8}{3}(3)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}(5)^{\frac{3}{4}}$$

$$\boxed{I_5(2) = \frac{-192}{5} + \frac{8}{5}\left(3^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{4}}\right)}$$

## Exercice 11

Soient 3 fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ : $f$ continue, $u$ et $v$ dérivables.
Soit $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$

1) Exprimons $g$ à l'aide de $F$, $u$ et $v$.

$$g(x) = \left[F(t)\right]_{u(x)}^{v(x)}$$

$$= F(v(x)) - F(u(x))$$

$$\boxed{g = F\circ v - F\circ u}$$

Déduisons sa dérivée $g'(x)$

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composé de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Sa dérivée est définie par :

$$g'(x) = v'(x)\,F'(v(x)) - u'(x)\,F'(u(x))$$

$$\boxed{g'(x) = v'(x)\,f[v(x)] - u'(x)\,f[u(x)]}$$

Dans toute la suite du problème, on pose $g(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

2) Montrons que la fonction $g$ est impaire et étudier ses variations

posons $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

$f$ est definie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$, $F$ sera donc définie et continue sur $\mathbb{R}$. On $g$ est une somme de fonctions composées par $F$ de $u(x) = x$ et $v(x) = 2x$. Par conséquent $g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$

Parité

$D_g = \mathbb{R}$ est symétrique

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

$$g(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

Posons $u = -t \Rightarrow dt = -du$

$$g(-x) = \int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4+u^2+1}}$$

$$= -g(x)$$

On a $g(-x) = -g(x)$ et $D_g$ est symétrique d'où $g$ est impaire.

Variations de $g$

D'après ①

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^4+(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\,\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{(16x^4+4x^2+1)(x^4+x^2+1)} > 0$

Donc le signe de $g$ depend de $2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}$

$$= \frac{-12x^4+3}{\Delta}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ |
| $g(x)$ | $\searrow$ | $g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\nearrow$ | $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\searrow$ |

Sur $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $g'(x) < 0$ donc $g$ est décroissante

Sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $g'(x) > 0$ donc $g$ est croissante

Sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$ $g'(x) < 0$ donc $g$ est décroissante

3) Déterminons le developpement limite de $g$ à l'ordre 5 au voisinage de $0$.

$$f = \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+(t^4+t^2)}}$$

$$= \frac{1}{\left(1+(t^4+t^2)\right)^{1/2}}$$

~~$DL_0^5(f) = \frac{1}{(1+x)^\alpha} = (1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$~~

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3)$$

Posons $x = t^4+t^2$

$$\left(1+(t^4+t^2)\right)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}(t^4+t^2)+\frac{3}{8}(t^4+t^2)^2+o(t^5)$$

$$= 1-\frac{1}{2}(t^4+t^2)+\frac{3}{8}t^4+o(t^5)$$

$$= 1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4+o(t^5)$$

$$DL_0^5 g = DL_0^5 F = \int_x^{2x} dt - \int_x \frac{1}{2}t^2 dt - \int_x \frac{1}{8}t^4$$

$$= \left[t\right]_x^{2x} - \left[\frac{1}{6}t^3\right]_x^{2x} - \left[\frac{1}{40}t^5\right]_x^{2x}$$

$$= 2x - x - \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{6}(x)^3 - \frac{1}{40}(2x)^5 + \frac{1}{40}(x)^5$$

$$= x - \frac{1}{6}(8x^3 - x^3) - \frac{1}{40}(32x^5 - x^5)$$

$$= x - \frac{1}{6}(7x^3) - \frac{1}{40}(31x^5)$$

$$\boxed{DL_0^5 g = x - \frac{7}{6}x^3 - \frac{31x^5}{40} + o(x^5)}$$

4) a) Démontrons les inégalités $\forall t \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leq \frac{1}{t^2}$$

Montrons que $\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \geq 0$

on a $\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} = \frac{\sqrt{t^4+t^2+1} - (t^2+1)}{(t^2+1)\sqrt{t^4+t^2+1}}$

$(t^2+1)\sqrt{t^4+t^2+1} > 0$

Deduisons le signe de $\sqrt{t^4+t^2+1} - (t^2+1)$

$$t^4 \leq t^4+t^2+1 \leq t^4+t^2+1+t^2$$

$$t^4 \leq t^4+t^2+1 \leq (t^2+1)^2$$

$$t^2 \leq \sqrt{t^4+t^2+1} \leq t^2+1$$

$$\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \geq \frac{1}{t^2+1}$$

b) Déduisons que $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $\arctan 2x - \arctan x \leq g(x) \leq \frac{1}{2x}$

D'après a) on a $\frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leq \frac{1}{t^2}$

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t^2+1} \leq g(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}$$

$$\left[\arctan x\right]_x^{2x} \leq g(x) \leq \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x}$$

$$\arctan 2x - \arctan x \leq g(x) \leq \frac{-1}{2x} + \frac{1}{x}$$

$$\arctan 2x - \arctan x \leq g(x) \leq \frac{1}{2x}$$

Déduisons $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

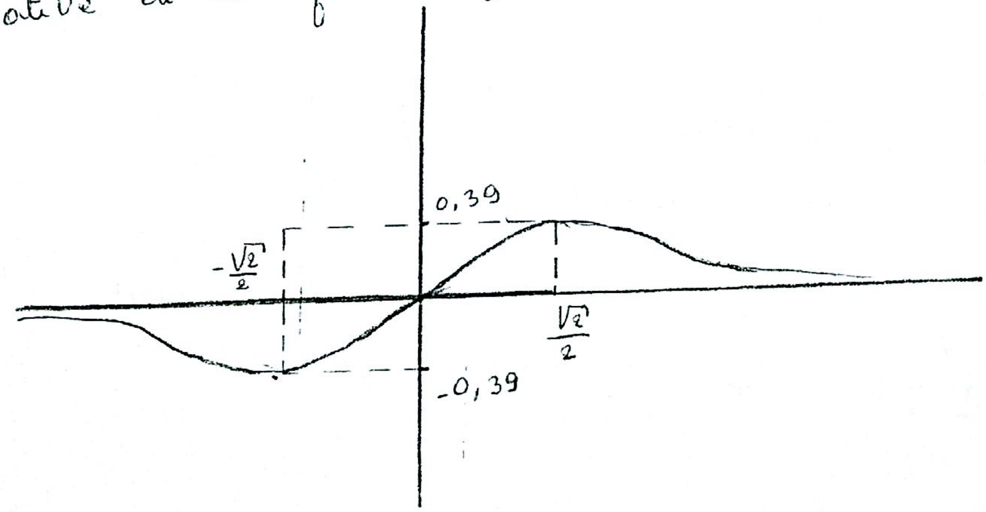
$$\lim_{x \to +\infty} (\arctan 2x - \arctan x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2x}\right) = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} (\arctan 2x) = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \to +\infty} (\arctan x) = \frac{\pi}{2} \\ \text{et} \\ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2x}\right) = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (\arctan 2x - \arctan x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

c) Sachant que $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 0,39$ donnons l'allure de la courbe représentative de la fonction $g$.



5) On pose $H(X) = \int_0^X (\arctan 2x - \arctan x)\, dx$

a) Calculons $H(X)$

$$H(X) = \int_0^X \arctan 2x \, dx - \int_0^X \arctan x \, dx$$

Posons $u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x$

$V(x) = \arctan 2x \Rightarrow V'(x) = \dfrac{2}{1+4x^2}$

$$\int_0^X \arctan 2x \, dx = \left[x \arctan 2x\right]_0^X - \int_0^X \frac{2x}{1+4x^2}\, dx$$

$$= X \arctan 2X - \frac{1}{4}\left[\ln(1+4x^2)\right]_0^X$$

$$= X \arctan 2X - \frac{1}{4}\ln(1+4X^2) - \frac{1}{4}\ln(1)$$

$$= X \arctan 2X - \frac{1}{4}\ln(1+4X^2)$$

Posons $u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x$

$V(x) = \arctan x \Rightarrow V'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\int_0^X \arctan x \, dx = \left[x \arctan x\right]_0^X - \int_0^X \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= X \arctan X - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^X$$

$$= X \arctan X - \frac{1}{2}\ln(1+X^2)$$

$$H(X) = X \arctan 2X - \frac{1}{4}\ln(1+4X^2) - X \arctan X + \frac{1}{2}\ln(1+X^2)$$

$$\boxed{H(X) = X(\arctan 2X - \arctan X) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(1+4X^2) - \ln(1+X^2)\right)}$$

b) Demontrons la relation $\arctan y + \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*$

Soit $f(y) = \arctan y + \arctan \frac{1}{y}$

$$f'(y) = \frac{1}{1+y^2} + \left(-\frac{1}{y^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}\right) = \frac{1}{1+y^2} - \frac{y^2}{(y^2+1)y^2} = \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2} = 0$$

on a $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(y) = \frac{\pi}{2}$

Scanned by CamScanner

# TD n°2 d'Analyse II

## Exercice 3

1) Montrons que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\, dt$

On a : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}\, dt = \left[\ln|\cos t + \sin t|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \ln 1 = 0$

d'où $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\, dt$

Déduisons la valeur de $I$

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\, dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\, dt$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I + J = \frac{\pi}{2}$ $\iff$ $2I = \frac{\pi}{2}$

$I - J = 0$ $\boxed{I = \frac{\pi}{4}}$

2) En effectuant un changement de variable convenable ;

Calculons l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}+t}\, dt$

En posant $t = \sin x \Rightarrow x = \arcsin t$

$dt = \cos x\, dx$

Si $t = 0 \Rightarrow x = 0$

Si $t = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Il vient que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}+t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = I$ (d'après 1)

Donc $\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}+t}\, dt = \frac{\pi}{4}}$

Exercice 4

Soit $f$ une fonction continue dans $[0;\pi]$

1) Montrons, en utilisant un changement de variables, que l

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

Soit $u(t) = \pi - t$

$u$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $D_f$

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_{u(0)}^{u(\pi)} f(u(t))\cdot u'(t)\,dt$$

En appliquant à notre fonction

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = -\int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t))\,dt$$

$$= \pi\int_0^\pi f(\sin x)\,dx - \int_0^\pi x f(\sin x)\,dx$$

$$2\int_0^\pi x\, f(\sin x)\,dx = \pi\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

$$\boxed{\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx}$$

2) Déduisons la valeur de $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

D'après 1) : $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

Calculons $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

En posant $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx$

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan t + cste$$

$$= -\arctan \cos t + cste$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\left[\arctan \cos x\right]_0^{\pi}$$
$$= -\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

donc $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}}$$

## Exercice 5

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ , $n \in \mathbb{N}$

1) Montrons que $(I_n)_n$ est positive décroissante

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin x \leq 1$

$$\sin^n x \times \sin x \leq \sin^n x$$
$$\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$$
$$I_{n+1} \leq I_n$$

Donc $(I_n)_n$ est décroissante et positive

2) Montrons que ~~$(I_n)_n$ est p~~ $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ et explicitons $I_n$, déduisons $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,dx$

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n+1} x\,dx$$

En posant $u'(x) = \sin x \Rightarrow u(x) = -\cos x$

$$V(x) = \sin^{n+1} x \quad \Rightarrow \quad V'(x) = (n+1)\sin^{n} x \cos x$$

$$I_{n+2} = \left[ -\cos x \sin^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)\cos^2 x \sin^n x \, dx$$

$$= + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \cos^2 x \sin^n x \, dx$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,(1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x \, dx$$

$$= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$$

$$I_{n+2}(n+1+1) = (n+1) I_n$$

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$$

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} I_{2n-4}$$

$$I_{2n-4} = \frac{2n-5}{2n-4} I_{2n-6}$$

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{2n(2n-2)(2n-4)} I_{2n-6}$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\times\dots\times(2n-(2n-1))}{2n(2n-2)(2n-4)\times\dots\times(2n-(2n-2))}$$

$$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\times\dots\times 1}{\left[2^n \times (n(n-1)(n-2)\times\dots\times 1)\right]^2}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$I_n = \frac{n!}{2^n\left(\left(\frac{1}{2}n\right)!\right)^2}$$

$$\boxed{I_n = \frac{n!}{2^n\left(\left(\frac{1}{2}n\right)!\right)^2}}$$

Scanned by CamScanner

Explicitons $I_n$

On a $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = 1$

$I_2 = \frac{1}{2} I_0$

$I_3 = \frac{2}{3} I_1$

$I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} I_0$

$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} I_1$

Pour $n$ pair $(n = 2n')$

$$I_{2n'} = \frac{2n'-1}{2n'} I_{2n'-2}$$

$$I_{2n'-2} = \frac{2n'-3}{2n'-2} I_{2n'-2}$$

$$I_{2n'-4} = \frac{2n'-5}{2n'-4} I_{2n'-6}$$

$\vdots$

$I_2 = \frac{1}{2} I_0$

En resumé on a

$$I_{2n'} = \frac{2n'-1}{2n'} \times \frac{2n'-3}{2n'-2} \times \frac{2n'-5}{2n'-4} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0$$

$$I_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times n} I_0$$

Pour $n$ impair $(n = 2n'+1)$

$$I_{2n'+1} = \frac{2n'}{2n'+1} I_{2n'-1}$$

$$I_{2n'-1} = \frac{2n'-2}{2n'-1} I_{2n'-3}$$

$$I_{2n'-3} = \frac{2n'-4}{2n'-3} I_{2n'-5}$$

$\vdots$

$I_3 = \frac{2}{3} I_1$

En résumé

$$I_{2n+1} = \frac{2n'}{2n'+1} \times \frac{2n'-2}{2n'-1} \times \frac{2n'-4}{2n'-3} \times \cdots \times \frac{2}{3} I_1$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \frac{n-5}{n-4} \times \cdots \times \frac{2}{3} I_1$$

$$\boxed{I_n = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (n-1)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times n} I_1}$$

Déduisons $\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \, dx$

$x^2-1$ étant pair sur $[-1,1]$ alors

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \, dx = 2 \int_0^1 (x^2-1)^n \, dx$$

Posons $x = \cos t$ ; $dx = -\sin t \, dt$

$x^2 - 1 = \sin^2 t$

$$\int_0^1 (x^2-1)^n \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin^2 t)^n (-\sin t) \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \sin^{2n+1} t \, dt$$

$$= (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, dt$$

$$\int_0^1 (x^2-1)^n \, dx = (-1)^n I_{2n+1}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \, dx = (-1)^n \, 2 I_{2n+1}}$$

3) Montrons que $I_n \sim I_{n+1}$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\sin x \in [0, 1]$ ie

$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ car $(I_n)_n$ est décroissante

en divisant par $I_n$ on a

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1 \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ d'où $I_{n+1} \sim I_n$

Scanned by CamScanner

4- A l'aide de $(n+1) I_n I_{n+1}$, Montrons que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

$(n+1) I_n I_{n+1}$

- $n = 0$

$1 I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$

- $n = 1$

$2 I_1 I_2 = \frac{\pi}{2}$

- $n = 2$

$3 I_2 I_3 = \frac{\pi}{2}$

$\vdots$

$(n+1) I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

Posons $U_n = (n+1) I_n I_{n+1}$

Montrons que $U_n$ est constant

On a : $U_{n+1} = (n+2) I_{n+1} I_{n+2}$

Or $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ d'où

$$U_{n+1} = (n+2)\left(\frac{n+1}{n+2} I_n\right) I_{n+1}$$

$$= (n+1) I_n I_{n+1}$$

$$= U_n = U_{n-1} = \dots = U_0 = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $(n+1) I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

Or $I_n \sim I_{n+1}$ d'où

$(n+1) I_n I_{n+1} \sim (n+1) I_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$

d'où $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2(n+1)}$

$$\Rightarrow I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

5 - En déduire $\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$

$$I_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times n} I_0$$

Pour $n = 2n'$

$$I_{2n'} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n'-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n'} I_0$$

$$(2n'+1)\, I_{2n'} = \frac{1\times 3\times \cdots \times(2n'+1)}{2\times 4\times \cdots \times 2n'}\, I_0 \quad \text{d'où}$$

$$\frac{1\times 3\times \cdots \times(2n+1)}{2\times 4\times \cdots \times 2n} = (2n+1)\,\frac{I_{2n}}{I_0}$$

$$= (2n+1)\,\frac{2}{\pi}\, I_{2n} \sim (2n+1)\,\frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

$$\sim (2n)\sqrt{\frac{\pi}{\pi^2 n}}$$

$$\sim (2n)\sqrt{\frac{1}{\pi n}}$$

$$\sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{1\times 3\times \cdots (2n+1)}{2\times 4\times \cdots \times 2n} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

## Exercice 1

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$$

1) En utilisant $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx$, calculons $I$ et $J$.

Montrons que $I = J$.

Posons $x = \frac{\pi}{2} - t$, $dx = -dt$

$$\begin{cases} x = 0, & t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2}, & t = 0 \end{cases}$$

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$$

d'où $J = I$

$$J + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x \cdot \sin x)\, dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) dx$$

$$J + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\, dx$$

$$J + I = \left[-x\ln 2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\, dx$$

$$* \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\, dx$$

posons $x = \frac{1}{2}u \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ \text{Si } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \pi \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln|\sin u|\, du = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\, du + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln|\sin u|\, du\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left(I + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln|\sin u|\, du\right)$$

Comme $I = J$ on a

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u\, du = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln|\cos u|\, du$$

car $\ln \cos u$ est une fonction périodique on a.

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln|\cos u|\, du = \int_0^{\pi/2} \ln \cos u\, du$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln \cos u\, du = J$$

donc

$$I + J = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}(I + J)$$

$$2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I$$

$$\boxed{I = -\frac{\pi}{2}\ln 2.}$$

$J = I$ donc $\boxed{J = -\frac{\pi}{2}\ln 2}$

## Exercice 9

$$f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}dt$$

1) Déterminons le domaine de définition de la fonction $f$

La fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Donc $D_f = \mathbb{R}$

2) Calculons $f(0)$ et lim en $+\infty$ de $f$

$\forall -x \in D_f$ , $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2}dt$

Soit $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

$$f(-x) = -\int_x^{2x} e^{-t^2}dt$$

Il vient que $f(-x) = -f(x)$ donc $f$ est impaire.

3) Étudions les variations de $f$ et dressons son tableau de variation

soit $v(x) = 2x$ et $u(x) = x$ et $g(t) = e^{-t^2}$

$g$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

Par suite $f$ est dérivable et sa dérivée est :

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t)\,dt = \left[G(t)\right]_x^{2x}$$

$= G(2x) - G(x)$ ($G$ étant une primitive de $g$). D'où

$$f'(x) = 2g(2x) - g(x)$$

$$= 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$

$$= e^{-x^2}\left(2e^{-3x^2} - 1\right)$$

donc le signe de $f'(x)$ dépend de $2e^{-3x^2} - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$ , $e^{-x^2} > 0$ donc

$$2e^{-3x^2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{-3x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -3x^2 = -\ln 2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}\ln 2$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3\ln 2}}{3}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{3}\ln 2}{3}$ | | $\frac{\sqrt{3}\ln 2}{3}$ | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $f(x_1)$ | $\nearrow$ | $f(x_2)$ | $\searrow$ | $0$ |

Soit $x > 0$

$$x \leq t \leq 2x$$

$$\Rightarrow x^2 \leq t^2 \leq 4x^2$$

$$\Rightarrow -4x^2 \leq -t^2 \leq -x^2$$

$$\Rightarrow e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$$

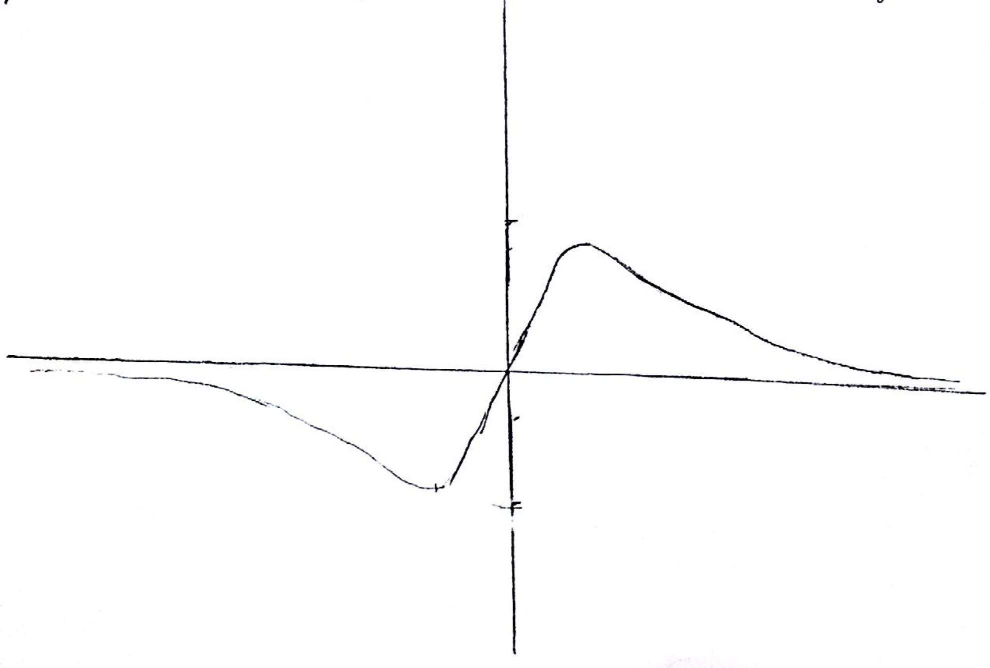
$$\Rightarrow \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \leq \int_x^{2x} e^{-x^2} = (2x - x) e^{-x^2}$$

Par suite $0 \leq f(x) \leq x e^{-x^2}$

Ainsi donc par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Par la parité, la limite en $\infty$ est $0$ : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

4) Donnons la representation de la fonction $f$.



36

## Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

1) Montrons que $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimons $f'(x)$

Soit $g(t) = \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$

g est définie et continue car produit et composé de deux fonctions

d'où f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\,dt$$

$$= \int_0^1 -e^{-x(1+t^2)}\,dt$$

$$\boxed{f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,dt}$$

2) Calculons $f(0)$ et lim en $+\infty$ de f

on a $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$= \left[\arctan t\right]_0^1$$

$$\boxed{f(0) = \frac{\pi}{4}}$$

$0 \leq t \leq 1$

$0 \leq t^2 \leq 1$

$1 \leq t^2+1 \leq 2$

$x \leq x(t^2+1) \leq 2x$

$-2x \leq -x(t^2+1) \leq -x$

$e^{-2x} \leq e^{-x(t^2+1)} \leq e^{-x}$

$\dfrac{e^{-2x}}{1+t^2} \leq \dfrac{e^{-x(t^2+1)}}{1+t^2} \leq \dfrac{e^{-x}}{1+t^2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{t^2+1}\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{t^2+1}\,dt$$

$$\cdot \int_0^1 \frac{e^{-x}}{t^2+1}\,dt = e^{-x}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{4}e^{-x}$$

Par suite pour $x \geq 0$

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{4}e^{-x} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3) On note $g$ l'application définie par $g(x) = f(x^2)$.

Montrons $g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

Posons $h(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$

$$h'(x) = 2x\,f'(x^2) + 2\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)'\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)$$

$$= 2x\,f'(x^2) + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

$$h'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

$$= -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{-y^2}\times\frac{1}{x}\,dy + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

$\left(y = xt\,,\ dy = x\,dt \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dy\right.$

$$= -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-y^2}dy + 2e^{-2x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt = 0$$

On a $h'(x) = 0$ d'où $h$ est une constante.

$$h(0) = g(0) + 0 = f(0) = \frac{\pi}{4}$$

Donc $g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

4) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

On a $f(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4} = f(0)$

$\Rightarrow \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4} - g(x)$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

car $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$$\boxed{\int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

## Exercice 8

Soit $a < b$ deux réels, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$ et continue.

1) Démontrons que $g$ est localement intégrable, bornée et vérifions que la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+T} g(t)dt = - \int_T^0 g(t)\, dt$$

- Montrons que $g$ est localement intégrable

$g$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et par conséquent localement intégrable.

- Montrons que $g$ est bornée :

$g$ est continue sur $[0; T]$ donc bornée sur cet intervalle et atteint ses bornes donc $\forall x \in [0, T]$, il existe deux réels $m$, $M$ tels que :

$m \leq g(x) \leq M$. Comme $g$ est périodique alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $g$ à l'intérieur de cet intervalle.

• Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{x\pi} g(t)\,dt = -\int_T^0 g(t)\,dt$

Soit $h : x \longmapsto \int_x^{x+\pi} g(t)\,dt$

Montrons que $h$ est constante.

En effet $h(x) = \int_x^{x+T} g(t)\,dt$

$= G(x+T) - G(x)$

d'où $h'(x) = g(x+T) - g(x)$

$g$ étant périodique, de période $T$ alors $h'(x) = 0$

d'où $h(x) = h(0) = \int_0^T g(t)\,dt$

Par conséquent on a : $\int_x^{x+T} g(t)\,dt = \int_0^T g(t)\,dt$

2- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$, par $g_n(x) = g(nx)$

a) Expliquons pourquoi $g_n$ est localement intégrable.

$g_n$ est la composée de deux fonctions ($x \mapsto g(x)$ et $x \longmapsto nx$) continues par conséquent $g_n$ est continue donc localement intégrable.

b) Montrons que $g_n$ est périodique et donnons sa période

on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = g(nx)$

$g$ est $T$-périodique.

soit $y = nx$

$g(y) = g(y+T)$

$g(nx) = g(nx+T)$

$g_n(x) = g\left(n\left(x + \frac{T}{n}\right)\right)$

$g_n(x) = g_n\left(x + \frac{T}{n}\right)$

d'où $g$ est $\frac{T}{n}$ périodique

2c) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{x+\frac{T}{n}} g_n(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_0^T g(t)\,dt$

Posons $y = nt \Rightarrow dy = n\,dt$

$$\int_x^{x+\frac{T}{n}} g_n(t)\,dt = \int_x^{x+\frac{T}{n}} g(nt)\,dt$$

$$= \int_{nx}^{nx+T} \frac{1}{n}\, g(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{n}\int_{nx}^{nx+T} g(y)\,dy$$

D'après 1) on a

$$\int_x^{x+\frac{T}{n}} g_n(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_{nx}^{nx+T} g(y)\,dy = \frac{1}{n}\int_0^T g(t)\,dt$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $k_n = \max\left\{ j \in \mathbb{N} \,/\, a + \frac{jT}{n} < b \right\}$ et on déduit la subdivision $(x_i)_{i\in\{0,\dots,k_n+1\}}$ en posant :

$$\begin{cases} x_i = a + \frac{iT}{n} & \text{si } i \in \{0,\dots,k_n\} \\ x_{k_n+1} = b \end{cases}$$

a) Calculons $\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n}$

On a par définition de $k_n$ :
$$\begin{cases} a + \frac{k_n T}{n} < b \iff \frac{k_n}{n} < \frac{b-a}{T} \\ a + \frac{(k_n+1)T}{n} \geq b \end{cases}$$

$$\frac{k_n+1}{n} \geq \frac{b-a}{T}$$

$$\frac{k_n}{n} \geq \frac{b-a}{T} - \frac{1}{n}$$

Par suite on a :

$$\frac{b-a}{T} - \frac{1}{n} \leq \frac{k_n}{n} < \frac{b-a}{T}$$

Par le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{T} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{T}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{k_n}{n}\right) = \frac{b-a}{T}$$

b) Montrons que $\int_a^b g_n(t)\,dt = \frac{k_n}{n}\int_0^T g(t)\,dt + \int_{x\,k_n}^b g_n(t)\,dt$

$x_0 = a$

$x_1 = a + \frac{T}{n} = x_0 + \frac{T_n}{n}$

$x_2 = a + \frac{2T}{n} = x_1 + \frac{T}{n}$

$\vdots$

$x_{i+1} = x_i + \frac{T}{n}$

avec $x_0 = a$

$x_{k_n+1} = b$

On a d'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b g_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_{k_n+1}} g_n(t)\,dt$$

$$= \int_{x_0}^{x_1 = x_0 + \frac{T}{n}} g_n(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2 = x_1 + \frac{T}{n}} g_n(t)\,dt + \int_{x_2}^{x_3 = x_2 + \frac{T}{n}} g_n(t)\,dt + \dots + \int_{x_{k-1}}^{x_k = k_n - 1 + \frac{T}{n}} g_n(t)\,dt + \int_{x\,k_n}^b g_n(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^T g(t)\,dt + \frac{1}{n}\int_0^T g(t)\,dt + \int_0^T g(t)\,dt + \dots + \frac{1}{n}\int_0^T g(t)\,dt + \int_{x_{k_n}}^b g_n(t)\,dt$$

$$\boxed{\int_a^b g_n(t)\,dt = \frac{k_n}{n}\int_0^T g(t)\,dt + \int_{x_{k_n}}^b g_n(t)\,dt}$$

c) Calculons $\cancel{\lim_{n\to+\infty}\int_a^b g_n(t)\,dt}$ $\lim_{n\to+\infty}(b - x_{k_n})$, puis $\lim_{n\to+\infty}\int_{x\,k_n}^b g_n(t)\,dt$

* $\lim_{n\to+\infty}(b - x\,k_n)$

On a $(b - x\,k_n) = b - \left(a + \frac{k_n T}{n}\right)$

$= b - a - \frac{k_n T}{n}$

$= b - a - \frac{k_n}{n}(T)$

$$\lim_{n\to+\infty}(b - x_{k_n}) = \lim_{n\to+\infty} b - a - \frac{k_n}{n}T$$

$$= \cancel{\lim_{n\to+\infty}} \ b - a - \left(\frac{b-a}{T}\right)T$$

$$= b - a - b + a$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(b - x_{k_n}) = 0}$$

$* \lim_{n\to+\infty} \int_{x_{k_n}}^{b} g_n(t)\,dt$

On a que $g_n$ est bornée car $g$ est bornée

Par suite $\left| \int_{x_{k_n}}^{b} g_n(t)\,dt \right| \leq \int_{x_{k_n}}^{b} |g_n(t)|\,dt \leq \int_{x_{k_n}}^{b} M\,dt = (b - x_{k_n})M$

or $\lim_{n\to+\infty}(b - x_{k_n}) = 0$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \int_{x_{k_n}}^{b} g_n(t)\,dt = 0$

d) Explicitons $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(t)\,dt$

D'après la relation de b, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{b-a}{T}\right)\int_0^T g(t)\,dt\right)$$

# TD n° 3 d' Analyse II

## Equations différentielles

### Exercice 2

1) Resolvons l'équation différentielle : $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$ sur chacun des intervalles I suivants :

* $I = ]1; +\infty[$

$$y' - \frac{2x}{1-x^2}\, y = \frac{x^2}{1-x^2}$$

* L'equation homogène associée est : $y' - \frac{2x}{1-x^2}\, y = 0$

$$y' = \frac{2x}{1-x^2}\, y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1-x^2}\, y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1-x^2}\, dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\ln|1-x^2| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\ln y = -\ln(-(1-x^2)) + c$$

$$\ln y = \ln\left(\frac{1}{x^2-1}\right) + c$$

$$y_H = K\left(\frac{1}{x^2-1}\right) \qquad K \in \mathbb{R}$$

* solution particulière

$$y_p = K(x)\left(\frac{1}{x^2-1}\right) \qquad \text{avec } K'(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)\times\frac{1}{x^2-1}}$$

$$K'(x) = \frac{x^2}{\frac{1-x^2}{x^2-1}} = \frac{x^2}{\frac{-(x^2-1)}{x^2-1}} = -x^2$$

$$K(x) = \int -x^2\, dx = -\frac{1}{3}x^3 + c_1$$

$$y_p = \frac{-x^3+c_1}{3(-1+x^2)} = \frac{-x^3+c_1}{3(x^2-1)}$$

Donc une solution générale est :

$$y = y_H + y_p = \frac{K}{x^2-1} + \frac{-x^3+c_1}{3(x^2-1)}$$

$$y = \frac{3K - x^3 + c_1}{3(x^2-1)} = \frac{-x^3+C'}{3(x^2-1)}$$

$$\boxed{y = \frac{-x^3+C'}{3(x^2-1)}}$$

2) Resolvons l'équation différentielle : $|x|y' + (x-1)y$ sur $]-\infty ; 0[$ .

Sur $]-\infty ; 0[$ , l'équation différentielle devient : $-xy' + (x-1)y =$

qui est sous la forme $a(x)y' + b(x)y = c(x)$

* L'equation homogène est :

$$y' - \frac{(x-1)}{x} y = 0$$

Une solution homogène est sous la forme $ce^{-A(x)}$

avec $A(x) = \int \frac{-(x-1)}{x} dx$

$$= \int -1 \, dx + \int \frac{1}{x} dx$$

$$= -x + \ln|x| + c_1$$

$$= -x + \ln(-x) + c_1$$

Ainsi la solution homogène est

$$y_H = ce^{x - \ln(-x) + c_1}$$

$$= c(e^x \times e^{-\ln(-x)} \times e^{c_1})$$

$$= c(e^x \times (-\ln(-x)) \times c)$$

$$= c \frac{1}{-x} e^x$$

$$= \frac{c}{-x} e^x$$

$$\underline{y_H = \frac{-c}{x} e^x}$$

* Solution particulière

Elle est soust la forme $\quad y_p = \frac{-c(x)}{x} e^x$

avec $c'(x) = \frac{x^3}{-x\left(\frac{-1}{x} e^x\right)} = \frac{x^3}{e^x} = x^3 e^{-x}$

$c(x) = \int x^3 e^{-x} dx$

Integrons par partie :

$u' = e^{-x} \Rightarrow u = -e^{-x}$

$v = x^3 \Rightarrow v' = 3x^2$

$$C(x) = \int x^3 e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-x^3 e^{-x}\right] + \int 3x^2 e^{-x}\,dx$$

Calculons $\int 3x^2 e^{-x}\,dx$

$u' = e^{-x} \Rightarrow u = -e^{-x}$

$v' = 3x^2 \Rightarrow v = 6x$

$$\int 3x^2 e^{-x}\,dx = \left[-3x^2 e^{-x}\right] + \int 6x e^{-x}\,dx$$

Calculons $\int 6x e^{-x}\,dx$

$u' = e^{-x} \Rightarrow u = -e^{-x}$

$v = 6x \Rightarrow v' = 6$

$$\int 6x e^{-x}\,dx = \left[-6x e^{-x}\right] + \int 6 e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-6x e^{-x}\right] + \left[-6 e^{-x}\right]$$

$$C(x) = \left[-x^3 e^{-x}\right] + \left[-3x^2 e^{-x}\right] + \left[-6x e^{-x}\right] + \left[-6 e^{-x}\right]$$

$$= \left(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6\right) e^{-x} + C_2$$

$$= -e^{-x}\left(x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right) + C_2$$

$$y_p = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{x} + \frac{C_2 e^x}{x}$$

Donc la solution générale est :

$$y = y_H + y_p = \frac{-C}{x} e^x + \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{x} + \frac{C_2 e^x}{x}$$

$$\boxed{y = \frac{C' e^x}{x} + \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{x}}$$

Exercice 3

Resolvons sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

$y'' - 2y' + 2y = x \cos x \, \mathrm{ch}\, x$

$y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$

* L'équation homogène

$y'' + 6y' + 9y = 0$

L'équation caractéristique est : $r^2 + 6r + 9 = 0$

$\Delta = 0$

$r_1 = r_2 = \frac{-6}{2} = -3$

$y_H = (Ax + B) e^{-3x}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

* Solution particulière :

$P(x) \, e^{2x}$ avec $P(x) = (ax^2 + bx + c)$

$y_p = (ax^2 + bx + c) e^{2x}$

$y'_p = (2ax + b) e^{2x} + 2e^{2x}(ax^2 + bx + c)$

$= e^{2x}(2ax^2 + x(2a + 2b) + b + 2c)$

$y''_p = 2e^{2x}(2ax^2 + x(2a + 2b) + b + 2c) + e^{2x}(2ax + 2a + 2b)$

$= 2e^{2x}(2ax^2 + x(4a + 2b) + 2b + 2a + 2c)$

$= e^{2x}(4ax^2 + x(8a + 4b) + 4b + 2a + 4c)$

$y''_p + 6y'_p + 9y_p = x^2 e^{2x}$

${}^{2x}(4ax^2 + x(8a + 4b) + 4b + 2a + 4c) + 6e^{2x}(2ax^2 + x(2a + 2b) + b + 2c) + 9e^{2x}(ax^2 + bx + c) = x^2 e^{2x}$

${}^{2x}(25ax^2 + x(20a + 25b) + 2a + 10b + 25c) = x^2 e^{2x}$

$25a = 1$

$20a + 25b = 0$

$2a + 10b + 25c = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{25} \\ b = \frac{-20}{25} \times \frac{1}{25} = \frac{-20}{625} \\ c = \left(-\frac{2}{25} + \frac{200}{625}\right) \times \frac{1}{25} = +\frac{150}{625} \times \frac{1}{25} = \frac{6}{625} \end{cases}$

$P(x) = \frac{1}{25}x^2 - \frac{20}{625}x + \frac{6}{625}$

Donc $y_p = \left(\frac{1}{25}x^2 - \frac{20}{625}x + \frac{6}{625}\right)e^{2x}$

la solution générale est :

$y = y_H + y_p$

$$\boxed{y = (Ax + B)e^{-3x} + \left(\frac{1}{25}x^2 - \frac{20}{625}x + \frac{6}{625}\right)e^{2x}}$$

$y'' - 2y' + y = ch\, x$

Scanned by CamScanner

## Exercice 6

On considère l'équation différentielle de Bernouilli :

$$y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$$

1) En faisant un changement de variable convenable montrons que (1) peut s'écrire de la forme $v' = f(x)v + g(x)$

$$y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \cos x - \sin x$$

posons $v = \frac{1}{y} \Rightarrow v' = \frac{-y'}{y^2}$

$$-v' + v = \cos x - \sin x$$

$$v' = v + \sin x - \cos x$$

$$v' = f(x)v + g(x)$$

avec $f(x) = 1$ et $g(x) = \sin x - \cos x$

2) Resolvons l'équation sans second membre : $v' = f(x)v$

$v' = f(x)v \iff v' = v$ car $f(x) = 1$

$\iff v' - v = 0$

La solution de cette équation est de la forme $\lambda e^{-ax}$

donc $v(x) = \lambda e^{x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

3) Déterminons une solution particulière de (2)

La fonction $x \longmapsto -\sin x$ est une solut° particulière

$$v' = v - \cos x + \sin x$$

$$v' = -\sin x - \cos x + \sin x$$

$$v' = -\cos x$$

$$v = \int -\cos x \, dx$$

$\boxed{v = -\sin x}$ d'où le résultat

4) a) Donnons la solution générale de (2)

$v = h_H + h_p$

$$\boxed{v = \lambda e^x - \sin x}$$

b) En déduire la solution générale de (1)

On a : $v = \frac{1}{y} \iff y = \frac{1}{v}$

Donc la solution générale est :

$$\boxed{y = \frac{1}{\lambda e^x - \sin x}} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

5) Trouvons la solution $y = G(x)$ telle que $G(0) = 1$

$y = G(x) = \frac{1}{\lambda e^x - \sin x}$

$G(0) = 1$

$\lambda e^0 - \sin 0 = 1$

$\lambda = 1$

donc $\boxed{G(x) = \frac{1}{e^x - \sin x}}$

Exercice 7

(E) $\quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$

1) Déterminons $a \in ]0, \infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière $y_0$ de (E)

$y_0'(x) - \frac{1}{x} y_0(x) - (y_0(x))^2 = -9x^2$

$a - \frac{1}{x} ax - a^2x^2 = -9x^2$

$a - a - a^2x^2 = -9x^2$

$$-a^2x^2 = -9x^2$$
$$a^2 = 9$$
$$a = \pm 3$$

comme $a \in ]0; \infty[$ donc $a = 3$

2 - Montrons que le changement de fonction inconnue $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{Z(x)}$ transforme l'équat° (E) en l'équation différentielle $(E_1)$ $Z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) Z(x) = 1$

$$y(x) = y_0(x) - \frac{1}{Z(x)} \Rightarrow y'(x) = y_0'(x) + \frac{Z'(x)}{(Z(x))^2}$$

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$$

$$y_0'(x) + \frac{Z'(x)}{Z(x)^2} - \frac{1}{x}\left(y_0(x) - \frac{1}{Z(x)}\right) - y_0^2(x) - \frac{1}{Z(x)^2} + 2y_0(x)\frac{1}{Z(x)} = -9x^2$$

$$y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} - y_0^2(x) + \frac{Z'(x)}{Z(x)^2} + \frac{1}{xZ(x)} - \frac{1}{Z(x)^2} + 2y_0(x)\frac{1}{Z(x)} = -9x^2$$

car $y_0$ est solut° de E

$$\frac{Z'(x)}{Z(x)^2} + \frac{1}{xZ(x)} - \frac{1}{Z(x)^2} + \frac{2y_0(x)}{Z(x)} = 0$$

$$\frac{Z'(x) - 1}{Z(x)^2} + \frac{1 + 2xy_0(x)}{xZ(x)} = 0$$

$$(Z'(x) - 1) + \frac{Z(x)\left(1 + 2xy_0(x)\right)}{x} = 0$$

$$Z'(x) + Z(x)\left(\frac{1}{x} + 2y_0(x)\right) = 1$$

$$Z'(x) + Z(x)\left(\frac{1}{x} + 6x\right) = 1$$

3) Intégrons $(E_1)$ sur $]0, \infty[$

$(E_1)$ : $Z'(x) + Z(x)\left(6x + \frac{1}{x}\right) = 1$ $\quad Z'(x) + Z(x)\left(6x + \frac{1}{x}\right) = 0$

L'équation homogène est : $ce^{-A(x)}$

L'ensemble des solut° de $(E_1)$ sont sous la forme

$$A(x) = \int 6x + \frac{1}{x}\,dx = \int 6x\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{6}{2}x^2 + \ln x = 3x^2 + \ln x$$

$$Z_H(x) = ce^{-3x^2 + \ln x} = c\left(e^{-3x^2} \times e^{-\ln x}\right) = \frac{ce^{-3x^2}}{x}$$

Solution particulière

$$Z_p = \frac{C(x)\ e^{-3x^2}}{x}$$

avec $C'(x) = \dfrac{1}{\frac{e^{-3x^2}}{x}} = \dfrac{x}{e^{-3x^2}} = x e^{3x^2}$

$C(x) = \int x e^{3x^2} dx$

Soit $u' = x \Rightarrow u = \frac{1}{2} x^2$

$v = e^{3x^2} \Rightarrow v' = 6x e^{3x^2}$

$C(x) = \left[ \dfrac{x^2 e^{3x^2}}{2} \right] - \int 3x^3 e^{3x^2}$

$C(x) = \dfrac{1}{6} e^{3x^2}$

$Z_p = \dfrac{\frac{1}{6} e^{3x^2} e^{-3x^2}}{x} = \dfrac{1}{6x}$

La solution générale est :

$Z = \dfrac{C e^{-3x^2}}{x} + \dfrac{1}{6x}$

$$\boxed{Z = \frac{C e^{-3x^2}}{x} + \frac{1}{6x}}$$

4) Donnons toutes les solutions de (E) définies sur $]0, \infty[$

$y(x) = y_0(x) - \dfrac{1}{Z(x)}$

$= 3x - \dfrac{6x}{6C e^{-3x^2} + 1}$

$$\boxed{y(x) = 3x - \frac{6x}{6C e^{-3x^2} + 1}} \quad C \in \mathbb{R}$$

# Exercice 10

On considère l'équation : $y'' + 2y' + 4y = xe^{x}$ (E)

1) Resolvons l'équation différentielle homogène associée à (E).

* L'équation homogène est $y'' + 2y' + 4y = 0$

L'équation caractéristique est : $r^2 + 2r + 4 = 0$

$\Delta = 4 - 16 = -12 \qquad \sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{3}$

$r_1 = \dfrac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$

$r_2 = \dfrac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$

$$\boxed{y_H = Ae^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + Be^{-x}\sin(\sqrt{3}x)} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

2) Trouvons une solution particulière

$y_p = \varphi(x)e^{x}$ avec $\varphi(x) = ax + b$

$y_p' = ae^{x} + e^{x}(ax+b)$

$y_p'' = ae^{x} + ae^{x} + e^{x}(ax+b)$

$= 2ae^{x} + e^{x}(ax+b)$

$y_p'' + 2y_p' + 4y_p = xe^{x}$

$2ae^{x} + e^{x}(ax+b) + 2ae^{x} + 2e^{x}(ax+b) + 4e^{x}(ax+b) = xe^{x}$

$e^{x}(2a + ax + b + 2a + 2ax + 2b + 4ax + 4b) = xe^{x}$

$e^{x}(x(a + 2a + 4a) + 2a + b + 2a + 2b + 4b) = xe^{x}$

$e^{x}(x(7a) + 4a + 7b) = xe^{x}$

$$\begin{cases} 7a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{7} \\ 4a + 7b = 0 \Rightarrow b = -\frac{4}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{-4}{49} \end{cases}$$

$$\boxed{y_p = \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^{x}}$$

Donnons l'ensemble de toutes les solutions de $(E)$

$y = y_H + y_P$

$$\boxed{y = e^{-x}\left(A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x)\right) + e^{x}\left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)}$$

3) Déterminons l'unique solution $h$ de $(E)$ vérifiant $h(0)=1$ et $h(1)=0$

$h(0) = 1 \Rightarrow A - \frac{4}{49} = 1$ (1)

$h(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{e}\left(A\cos\sqrt{3} + B\sin\sqrt{3}\right) + e\left(\frac{3}{49}\right) = 0$ (2)

(1) $\Rightarrow A = 1 + \frac{4}{49} = \frac{53}{49}$

(2) $\Rightarrow \frac{1}{e}\left(\frac{53}{49}\cos\sqrt{3} + B\sin\sqrt{3}\right) + \frac{3e}{49} = 0$

$\Rightarrow \frac{53}{49}\cos\sqrt{3} + B\sin\sqrt{3} = -\frac{3e^2}{49}$

$\Rightarrow B\sin\sqrt{3} = \frac{-3e^2}{49} - \frac{53}{49}\cos\sqrt{3}$ $\quad (g\circ f)' = f' \times g'\circ f$

$\Rightarrow B = \dfrac{\frac{-3e^2}{49} - \frac{53}{49}\cos\sqrt{3}}{\sin\sqrt{3}}$

$B = \dfrac{-3e^2 - 53\cos\sqrt{3}}{49\sin\sqrt{3}}$

$$\boxed{h = e^{-x}\left(\frac{53}{49}\cos(\sqrt{3}x) - \frac{3e^2 + 53\cos\sqrt{3}}{49\sin\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x)\right) + e^{x}\left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)}$$

4) Soit $f : ]0;\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonct° deux fois dérivable sur $]0;\infty[$ et qui vérifie : $t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t\log t$

a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifions que $g$ est solution de $(E)$

$g'(x) = e^x f'(e^x)$

$g''(x) = e^x f'(e^x) + e^x\left(f''(e^x)e^x\right) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$

$\Rightarrow e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) =$

$= e^{2x} f''(e^x) + 3e^x f'(e^x) + 4f(e^x)$

$$6 = (e^x)^2 f''(e^x) + 3e^x f'(e^x) + 4f(e^x)$$

car d'après 4) $f$ vérifie l'équation différentielle $(E')$

Comme $e^x \in ]0;+\infty[$ on a :

$$(e^x)^2 f''(e^x) + 3e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \log e^x$$
$$= x e^x$$

b) Déduisons une expression de $f$.

Comme $g$ est solution de l'équation diff $(E)$ alors $f$ a pour express° $e^x\left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)$

$$g(x) = f(e^x) = e^{-x}\left(A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x)\right) + e^x\left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)$$

posons $t = e^x \Rightarrow x = \ln t$

$$f(t) = \frac{1}{t}\left(A\cos(\sqrt{3}\ln t) + B\sin(\sqrt{3}\ln t)\right) + t\left(\frac{1}{7}\ln t - \frac{4}{49}\right)$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{t}\left(A\cos(\sqrt{3}\ln t) + B\sin(\sqrt{3}\ln t)\right) + t\left(\frac{1}{7}\ln t - \frac{4}{49}\right)}$$

## Exercice 14

Soit $(E) : (x^2+1)y'' - 2y = 0$

1) Montrons qu'une solution polynomiale de $(E)$ autre que la fonct° nulle est nécessairem de degré deux.

Posons $y_0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$

Si $y_0$ est solution de $(E)$ on a :

$$y_0'' = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \dots + 2a_0$$

En remplaçant dans $(E)$ on a :

$$(n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \dots + a_2)(x^2+1) = 2(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)$$

$$n(n-1) = 2$$
$$n^2 - n - 2 = 0$$

$\Delta = 1+8 = 9$ $\qquad$ $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ impossible

$x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

Par suite $y_0$ est nécessairement de degré 2.

Déterminons une telle solution polynomiale $y_0$

Posons $y_0 = ax^2 + bx + c$

$y'_0 = 2ax + b \qquad y''_0 = 2a$

$(E) : (x^2+1)y''_0 - 2y_0 = 0$

$(x^2+1)y''_0 = 2y_0$

$2ax^2 + 2a = 2(ax^2+bx+c)$

$2ax^2 + 2a = 2ax^2 + 2bx + 2c$

$2a - 2c - 2bx = 0 \quad \Rightarrow 2a = 2bx + 2c$

$\begin{cases} 2b = 0 \quad \Rightarrow b = 0 \\ c = a \end{cases}$

$\boxed{y_0 = ax^2 + a = K(x^2+1)}$ $\qquad y'_0 = 2Kx \qquad y''_0 = 2K$

2) Montrons que toute fonct° $y$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $y = y_0 z$ où $z$ est une fonction de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$

Comme la fonction $y_0$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alor il suffit de poser $z = \frac{y}{y_0}$ pour obtenir une fonct° $z$ de classe $C^2$ qui vérifie l'égalité.

3) En posant $y = y_0 z$, montrons que $y$ est solution de $(E)$ si et seulem si la fonct° $Z = z'$ est solution d'une équat° différentielle $(E')$ que l'on écrira.

$y = y_0 z$

$y' = y'_0 z + z' y_0 \quad = 2Kxz + z'K(x^2+1)$

$y'' = y''_0 z + z'y'_0 + z''y_0 + y'_0 z' \quad = y''_0 z + 2y'_0 z' + z'' y_0$

$= 2Kz + 4Kxz' + z''K(x^2+1)$

7 Dans (E) on a :

$$(x^2+1)\left[2kz+4kxZ'+Z''k(x^2+1)\right]-2k(x^2+1)z=0$$

$$k(x^2+1)=0$$

$$(x^2+1)z''+4xz'+2z-2z=0$$

$$(x^2+1)z''+4xz'=0$$

$$Z=z' \Rightarrow Z'=z''$$

Ainsi l'équation (E') est la suivante :

$$\boxed{(E') : (x^2+1)Z'+4xZ=0}$$

4) Déduisons toutes les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$

D'après (2) il suffit d'avoir les solutions de (E')

$$(E') : Z'+\frac{4x}{x^2+1}Z=0$$

$$\Rightarrow \frac{Z'}{Z}=\frac{-4x}{x^2+1}=-2\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\ln Z=-2\ln|1+x^2|+K$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $1+x^2>0$ donc $|1+x^2|=1+x^2$

on a $\ln(Z)=\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2+k$

$$Z=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2\lambda \quad , \lambda\in\mathbb{R}$$

$$z=\int\frac{\lambda}{(1+x^2)^2}dx$$

Soit $u=\arctan x \Rightarrow x=\tan u$

$$du=\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow dx=(1+x^2)du$$

$$dx=(1+\tan^2 u)du$$

$$z=\int\frac{\lambda}{(1+\tan^2 u)^2}(1+\tan^2 u)du$$

$$z=\int\frac{\lambda}{1+\tan^2 u}du$$

$$z=\int\lambda\cos^2 u\,du \quad \text{or} \quad \cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\cos 2u}{2}$$

$$z = \int \frac{\lambda}{2}\,du + \int \frac{\lambda \cos 2u}{2}\,du$$

$$z = \lambda \left[ \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin 2u + K \right]$$

$$z = \frac{\lambda}{2} \left[ u + \frac{1}{2} \sin 2u \right] + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$y = y_0 z$$

Donc une solution de $(E)$ sera

$$y = K(x^2+1)\left[\frac{\lambda}{2}\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right) + k\right]$$

$$= \frac{K\lambda}{2}(x^2+1)\left(\arctan x + \frac{1}{2}\sin 2\arctan x\right) + K'$$

$$\boxed{y = \frac{C}{2}(x^2+1)\left(\arctan x + \frac{1}{2}\sin 2\arctan x\right) + K'}$$

## Exercice 15

Soit l'équation différentielle $\quad (1+x^2)y' - 3xy = 1 \quad (E)$

1) Montrons que $(E)$ admet pour solution particulière une fonction polynomiale de degré trois.

Soit $y_0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$

$y_0' = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$

$\cancel{(1+x^2)y' = y' + x^2 y'}$

$(1+x^2)y_0' - 3xy_0 = 1$

$(1+x^2)(n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1) - 3x(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0) = 1$

$(1+x^2)(n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1) = 3x(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0) + 1$

Par identification

on a $n = 3$

Donc la solut° particulière est de dégré 3.

Déterminons toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$

L'équation homogène associée est : $(1+x^2)y' - 3xy = 0$

* Solution homogène

Elle est de la forme : $y_H = Ce^{-A(x)}$

avec $A(x) = \int \frac{-3x}{1+x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{-3}{2}\ln|1+x^2| + c \quad c \in \mathbb{R}$

$= \frac{-3}{2}\ln(1+x^2)$ car $\forall x \in \mathbb{R}\ 1+x^2 > 0$

Donc $y_H = ce^{+\frac{3}{2}\ln(1+x^2)} \times e^c$

$= c(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$

$$y_H = C(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

* Solution particulière

Comme la solut° particulière est de degré 3 alors $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y_p' = 3ax^2 + 2bx + c$

$(1+x^2)y_p' - 3x\,y_p = 1$

$(1+x^2)(3ax^2 + 2bx + c) - 3x(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 1$

$3ax^2 + 2bx + c + 3ax^4 + 2bx^3 + cx^2 - 3ax^4 - 3bx^3 - 3cx^2 - 3dx = 1$

$-bx^3 + x^2(3a + \cancel{2c} - 3c) + x(2b-3d) + c = 1$

$-bx^3 + x^2(3a - 2c) + x(2b - 3d) + c = 1$

Par identification :

$$\begin{cases} b = 0 \\ 3a - 2c = 0 \\ 2b - 3d = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \\ a = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ d = 0 \end{cases}$$

Donc $y_p = \frac{2}{3}x^3 + x$

La solution générale est :

$y = y_H + y_P$

$= c\,(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^3 + x$

$$\boxed{y = c\,(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^3 + x} \qquad c \in \mathbb{R}$$

2) Montrons que, parmi les fonct° solutions de (E), une seule (que l'on notera g) admet une limite finie en $+\infty$

$$DL\,(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Posons $X = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{X}$

$x \to +\infty$, $X \to 0$

$$y = c\left(1+\frac{1}{X^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3X^3} + \frac{1}{X}$$

$$y = c\left(\frac{X^2+1}{X^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2+3X^2}{3X^3}$$

$$= \frac{c}{X^3}(X^2+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3X^3} + \frac{1}{X}$$

$$= \frac{c}{X^3}\left(1+\frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{8}X^4 - \frac{3}{48}X^6\right) + \frac{2}{3X^3} + \frac{1}{X} + o(X^6)$$

$$= \frac{c}{X^3} + \frac{3c}{2X} + \frac{3c}{8}X - \frac{3c}{48}X^3 + \frac{2}{3X^3} + \frac{1}{X} + o(X^6)$$

$$= \frac{1}{X^3}\left(c+\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{X}\left(\frac{3c}{2}+1\right) + \frac{3c}{8}X + o(X)$$

Par suite un $DL(y)_{+\infty}$ est :

$$y = \left(c+\frac{2}{3}\right)x^3 + \left(\frac{3c}{2}+1\right)x + \frac{3c}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour que la limite soit finie, il faut que $c + \frac{2}{3} = 0$ et $\frac{3c}{2} + 1 = 0$

La valeur de c est $-\frac{2}{3}$ qui vérifie les 2 conditions

$$\boxed{g(x) = -\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^3 + x}$$

Déterminons un équivalent de cette fonction g au voisinage de $+\infty$

$$y = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)x^3 + (1-1)x + \frac{3}{8x} \times \left(\frac{-2}{3}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}x + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc $g(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4x}$

3) Etudions les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{-2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^3 + x$$

$\underline{D_g = \mathbb{R}}$

* La dérivée

$$g'(x) = \frac{-2}{3} \times \frac{3}{2} \times 2x \times (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + 2x^2 + 1$$

$$g'(x) = -2x\sqrt{1+x^2} + 2x^2 + 1$$

$g'(x) = 0 \iff -2x\sqrt{1+x^2} + 2x^2 + 1 = 0$

$-2x\sqrt{1+x^2} = -2x^2 - 1$

$2x\sqrt{1+x^2} = 2x^2 + 1$

$2x\sqrt{1+x^2} = 4x^4 + 4x^2 + 1$

$4x^2(1+x^2) = 4x^4 + 4x^2 + 1$

$4x^2 + 4x^4 = 4x^4 + 4x^2 + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante.

4) Déterminons $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x^3}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^3 + x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \cancel{\frac{2}{3}} + \frac{1}{x^3} = 0$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{2}{3}x^3}{x^3} + \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x^3} = 0}$$